№7-дәріс

Функцияның шегі. Шексіз кіші функциялар, олардың қасиеттері. Шексіз үлкен функциялар. Шектер туралы негізгі теоремалар.

Нақты сандар

Рационал сандар деп $\frac{p}{q}$ түрінде болатын сандарды айтамыз, мұндағы p, q-бүтін сандар ($q \neq 0$). Сонымен бірге, ол шектеусіз периодты ондық бөлшек түрінде берілуі де мүмкін $\left(\frac{2}{3} = 0{,}666...\right)$.

Рационал сан болмайтын, шектеусіз периодты емес ондық бөлшек түрінде берілетін$\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ сандар да табылады. Бұндай сандар иррационал сандар деп аталады.

Анықтама. Барлық рационал сандар мен иррационал сандар жиынын нақты (заттық) сандар жиыны деп атаймыз.

Нақты сандарды сандық осьтегі нүктелер арқылы бейнелеуге болады. Нақты сандар жиыны мен сандық осьтің нүктелерінің жиынының арасында өзара-бірмәнді сәйкестік бар, яғни, барлық нақты сандар бүкіл сан осін толық жабады.

Нақты айнымалы функция

Бізге $X, У$ құр емес жиындары берілсін.

Анықтама: Әрбір $x \in X$ элементіне $y \in У$ элементі сәйкес келетін сәйкестік X жиынында анықталған, У жиынында мәндері бар функция деп аталады.

Анықтама: Анықталу облысы деп $y \in У$ мәндері табылатын $x \in X$ мәндер жиынын айтады.

$y = f(x)$ - айқын жарияланған функция;

$F(x) = 0$ - функция;

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ - параметрлік түрде берілген функция.

$f(-x) = f(x)$ - жұп функция, OY осіне симметриялы,

$f(-x) = -f(x)$ - тақ функция, OX осіне симметриялы,

$f(x+c) = f(x)$ - периодты функция,

$f(x+c) = f(x)$ - периодсыз функция.

Шексіз сандық тізбек және оның шегі.

Анықтама: Кез келген натурал n-ге белгілі бір заңдылықпен x_n саны - тізбектің мүшесі сәйкестендірілсе, сандық тізбек берілген деп айтады. $x_1, x_2, ..., x_n$ немесе $\{x_n\}$, мұндағы n - тізбек мүшесінің нөмірі.

Мысалы: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; ...$

Анықтама: "a" саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады, егер $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \quad n > N(\varepsilon)$ үшін келесі теңсіздік орындалса $|x_n - a| < \varepsilon$

Белгіленуі: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Тізбектің шегі туралы негізгі теоремалар.

Т1. $\{x_n\}$ сандық тізбегінің бірден артық шегі болмайды.

Анықтама: $\{x_n\}$ тізбегі жинақты деп аталады, егер оның шегі ақырлы сан болса.

Егер шегі ∞ - ке тең болса, онда тізбек жинақсыз деп аталады.

Т2. Егер $\{x_n\}, \{b_n\}$ және $\{y_n\}$ жинақты тізбектері үшін $x_n < b_n < y_n$ теңсіздігі орындалса, онда кез келген n үшін шектері келесідей болады.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ болады.

Анықтама: $\{x_n\}$ тізбегі шектелген деп аталады, егер кез келген n үшін $|x_n| \le M$ теңсіздігі орындалатындай M саны табылса.

Анықтама: $\{x_n\}$ тізбегі шексіз аз тізбек деп аталады, егер оның шегі нөлге тең болса. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Т3. a саны тізбектің шегі болуы болуы үшін $\{x_n - a\}$ тізбегі шексіз аз болуы қажетті және жеткілікті шарт.

Т4. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ тізбектерінің шегі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ болса, онда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ және $\{\frac{x_n}{y_n}\} b \ne 0$ тізбектерінің шегі сәйкесінше $a \pm b;\ ab;\ \frac{a}{b}$ болады.

$\{\beta_n\}$ тізбегі шексіз үлкен тізбек деп аталады, егер $\forall\, A \quad \exists\, N \quad n > N$ үшін келесі теңсіздік орындалса $|\beta_n| > A$. Белгіленуі: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$

Т5. Егер $\{\beta_n\}$ тізбегі шексіз үлкен тізбек болса, онда $\{\frac{1}{\beta_n}\}$ тізбегі шексіз аз тізбек.

Т6. Егер $\{\alpha_n\}$ тізбегі шексіз аз тізбек болса, $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ тізбегі шексіз үлкен тізбек.

Бұл теоремалардан келесі символдық жазба шығады.

$$\left|\frac{1}{\infty}\right| = 0, \quad \left|\frac{1}{0}\right| = \infty$$

Функцияның шегі.

Анықтама: А саны $x \to x_0$ ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі деп аталады, егер $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) \;\; n > N(\varepsilon)$және $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (x - \delta)(x + \delta)$ аймағы үшін мәндер облысы $f(x) \in O(A - \varepsilon)(A + \varepsilon)$

Функцияның шегі туралы теоремалар.

1. Егер функцияның шегі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B, \quad B \neq 0$, онда

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A + B$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}$$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot c = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

3. Егер $f(x) = c \; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

Анықтама: А саны $x \to \infty$ ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі деп аталады, егер $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ және $|x| > \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \delta$ теңсіздігі орындалса.

Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$